Chapitre 24 : Dénombrement

Table des matières

1 Ensembles finis **2**

2 Arrangements, permutations et combinaisons **4**
2.1 Arrangements 4
2.2 Permutations 4
2.3 Combinaisons 4

3 Quelques démonstrations combinatoires **5**
3.1 Démonstration du triangle de Pascal 5
3.2 Démonstration du binôme de Newton 5

4 Résumé et exemples **5**

1 Ensembles finis

Définition 1.1 (cardinal)

Le cardinal d'un ensemble A, noté $\mathrm{Card}(A)$, $|A|$, ou $\#A$, est son nombre d'éléments, qui peut être un entier naturel (on dit alors que l'ensemble est fini) ou $+\infty$.

Remarques :

1. Un ensemble A est de cardinal $n \in \mathbb{N}$ si et seulement si on peut trouver une bijection $f : [\![1\,;n]\!] \to A$ (ce qui revient à numéroter les éléments de A).
2. S'il existe une bijection $f : A \to B$, alors A et B ont le même cardinal (qu'il soit fini ou infini).

Proposition 1.2 (cardinal d'une partie)

Soit A un ensemble fini, et soit B une partie de A.
Alors B est un ensemble fini et $|B| \leqslant |A|$.
De plus, $|B| = |A|$ si et seulement si $B = A$.

Démonstration.
Comme les éléments de B sont aussi des éléments de A, alors B ne possède qu'un nombre fini d'éléments, et $|B| \leqslant |A|$. De plus, si B possède autant d'éléments que A, alors tous les éléments de A sont dans B, d'où $A = B$. □

Théorème 1.3 (applications entre deux ensembles finis de même cardinal)

Soit $f : A \to B$ une application, avec A et B des ensembles **finis** non vides de **même cardinal**.
On a alors les équivalences suivantes :

$$f \text{ est bijective} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est injective} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est surjective.}$$

Remarque : Ceci s'applique en particulier pour $f : A \to A$, avec A ensemble **fini** non vide.

Exemple 1.4 : Donner des exemples d'applications $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

- bijective ;
- injective et non surjective ;
- non injective et surjective.

Proposition 1.5 (cardinal d'un produit cartésien)

Soient $A_1, \cdots, A_p$ des ensembles finis, avec $p \in \mathbb{N}^*$.
Alors le produit cartésien $A_1 \times \cdots \times A_p$ est fini, et $|A_1 \times \cdots \times A_p| = |A_1| \times \cdots \times |A_p|$.

Vocabulaire : Pour A un ensemble fini, les éléments de A^p sont appelés des p-listes ou des p-uplets d'éléments de A.

Démonstration.
Un élément du produit cartésien $A_1 \times \cdots \times A_p$ est un p-uplet $(a_1, \cdots, a_p)$, avec $a_1 \in A_1, \ldots, a_p \in A_p$.
On a $|A_1|$ possibilités pour le choix de $a_1, \ldots, |A_p|$ possibilités pour le choix de a_p, et donc au total $|A_1| \times \cdots \times |A_p|$ possibilités pour le choix du p-uplet $(a_1, \cdots, a_p)$, ce nombre de possibilités étant le cardinal de $A_1 \times \cdots \times A_p$. □

Exemple 1.6 : Combien y a-t-il de couples $(x,y) \in \left\{-7; -2; -1; 0; 1; \sqrt{2}; \pi; 12\right\}^2$?

Proposition 1.7 (cardinal d'une réunion disjointe)

Soient A et B deux ensembles finis tels que $A \cap B = \emptyset$.
Alors $A \cup B$ est un ensemble fini et $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Corollaire 1.8 (cardinal d'une différence ensembliste)

Soient A et B deux ensembles. On suppose que A est fini.
Alors l'ensemble $A \backslash B$ est fini, de cardinal $|A \backslash B| = |A| - |A \cap B|$.

Démonstration.
$A \backslash B \subset A$ et $A \cap B \subset A$, avec A un ensemble fini, donc $A \backslash B$ et $A \cap B$ sont finis.
Comme A est l'union disjointe de $A \cap B$ et de $A \backslash B$, alors $|A| = |A \cap B| + |A \backslash B|$ i.e. $|A \backslash B| = |A| - |A \cap B|$. $\square$

Corollaire 1.9 (cardinal du complémentaire)

Soient E un ensemble fini et A une partie de E.
Alors l'ensemble $\overline{A} = E \backslash A$ est fini de cardinal $|\overline{A}| = |E| - |A|$.

Corollaire 1.10 (cardinal d'une réunion)

Soient A et B deux ensembles finis.
Alors $A \cup B$ est un ensemble fini et $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Exemple 1.11 : Combien y a-t-il de couples $(x,y) \in \left\{-7; -2; -1; 0; 1; \sqrt{2}; \pi; 12\right\}^2$ tels que $x\,y \neq 0$?

Proposition 1.12 (nombre d'applications entre deux ensembles finis)

Soient A et B deux ensembles finis non vides.
Alors l'ensemble $B^A = \mathcal{F}(A,B)$ des applications de A dans B est fini, et $\left|B^A\right| = |B|^{|A|}$.

Démonstration. On note $a_1, \ldots, a_n$ les éléments distincts de A, avec $n = |A| \in \mathbb{N}^*$.
Définir une application $f : A \to B$ revient à choisir, pour tout élément a_i de A, un élément $f(a_i)$ dans B.
On a $|B|$ choix possibles pour $f(a_1), \ldots, |B|$ choix possibles pour $f(a_n)$, donc au total $\underbrace{|B| \times \cdots \times |B|}_{n \text{ fois}} = |B|^n$ choix possibles pour l'application f. On en déduit que B^A est fini, de cardinal $|B|^n = |B|^{|A|}$. $\square$

Exemple 1.13 : Combien y a-t-il d'applications de $\{1; 2; 3\}$ dans $\{1; 2\}$?

Proposition 1.14 (nombre de parties d'un ensemble fini)

Soit A un ensemble fini.
Alors l'ensemble $\mathcal{P}(A)$ des parties de A est fini, et $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Remarque : Il est important de faire la distinction entre une partie (pas d'ordre a priori des éléments qui la compose) et un p-uplet (les éléments sont donnés dans un ordre précis et les répétitions sont admises). Une partie d'éléments de A est un élément de $\mathcal{P}(A)$ tandis qu'un p-uplet ou une famille de p éléments de A est un élément de A^p. On a $\{1; 2\} = \{2; 1\}$ mais $(1,2) \neq (2,1)$.

Exemple 1.15 : Combien y a-t-il de parties dans $\left\{-7; -2; -1; 0; 1; \sqrt{2}; \pi; 12\right\}$?

2 Arrangements, permutations et combinaisons

2.1 Arrangements

Théorème 2.1 (nombre d'arrangements)

Soit E un ensemble fini de cardinal n, et soit $p \in \mathbb{N}$.
Le nombre de p-uplets d'éléments **distincts** de E (on dit aussi « p-arrangement de E »), noté A_n^p, est égal à :

$$\mathrm{A}_n^p \quad = \quad \underbrace{n(n-1)\cdots(n-p+1)}_{p \text{ facteurs}} \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

Remarque : Dans un arrangement, on prend en compte l'ordre des éléments.

Proposition 2.2 (nombre d'applications injectives entre deux ensembles finis)

Soient E et F des ensembles finis non vides, de cardinaux respectifs p et n.
Le nombre d'applications injectives de E dans F est égal à A_n^p.

2.2 Permutations

Théorème 2.3 (nombre de permutations)

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
Le nombre de permutations de E (c'est-à-dire de bijections de E dans E) est égal à $n!$.

Remarque : $n!$ est aussi le nombre de bijections de $[\![1\,;n]\!]$ dans un ensemble à n éléments, ou encore le nombre de façons d'ordonner n éléments distincts.

2.3 Combinaisons

Théorème 2.4 (nombre de combinaisons)

Soit E un ensemble fini de cardinal n, et soit $p \in \mathbb{N}$.
Le nombre de parties de E à p éléments (on dit aussi « p-combinaison de E »), noté C_n^p ou $\dbinom{n}{p}$, est égal à :

$$\mathrm{C}_n^p \quad = \quad \binom{n}{p} \quad = \quad \frac{\mathrm{A}_n^p}{p!} \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

Remarques :

- Dans une combinaison, on ne prend pas en compte l'ordre des éléments.
- Soit A un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$.
  Pour tout $p \in [\![0\,;n]\!]$, on note $\mathcal{C}_p$ l'ensemble des parties de A possédant p éléments.
  L'ensemble $\mathcal{P}(A)$ est alors la réunion disjointe des ensembles $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$, ... , $\mathcal{C}_n$, d'où :

  $$|\mathcal{P}(A)| = \sum_{p=0}^{n} |\mathcal{C}_p| = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$$

  On retrouve de cette manière le cardinal de $\mathcal{P}(A)$.

3 Quelques démonstrations combinatoires

3.1 Démonstration du triangle de Pascal

Soient $n,k \in \mathbb{N}^*$ tels que $0 < k < n$. On souhaite montrer que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.
Considérons l'ensemble $[\![1;n]\!]$ et dénombrons ses sous-ensembles à k éléments.
On distingue les ensembles qui contiennent le premier élément et les ensembles qui ne le contiennent pas.
Il y a $\binom{n-1}{k}$ ensembles qui ne contiennent pas le premier élément et il y en a $\binom{n-1}{k-1}$ qui contiennent n.
Au total on a donc $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ manières de choisir nos k éléments parmi nos n entiers, d'où le résultat.

3.2 Démonstration du binôme de Newton

Soient a et $b \in \mathbb{C}$ et soit $n \in \mathbb{N}$.
On souhaite montrer que $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Par définition : $(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \times (a+b) \times \cdots \times (a+b)}_{n \text{ fois}}$.
Lorsqu'on développe ce produit en utilisant la distributivité, on obtient une somme de termes de la forme $x_1 \cdots x_n$, avec $x_i \in \{a\,;b\}$, et chaque écriture possible d'un tel produit apparaît une et une seule fois dans la somme.
Comme a et b commutent, chaque terme $x_1 \cdots x_n$ peut aussi se réécrire sous la forme $a^k b^{n-k}$, où $k \in [\![0\,;n]\!]$ est le nombre des x_i égaux à a, et $n-k$ le nombre des x_i égaux à b.
Pour un $k \in [\![0\,;n]\!]$ donné, le nombre de termes de la somme qui s'écrivent $a^k b^{n-k}$ est égal au nombre d'écritures $x_1 \cdots x_n$ dans lesquelles k des facteurs x_i sont égaux à a (et les $n-k$ autres sont égaux à b), ce qui correspond au nombre de façons de choisir un ensemble de k indices parmi les entiers de 1 à n, c'est-à-dire $\binom{n}{k}$.
Pour chaque $k \in [\![0\,;n]\!]$, on a donc $\binom{n}{k}$ termes égaux à $a^k b^{n-k}$.
Finalement, la somme développée peut ainsi se réécrire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \underbrace{a^k b^{n-k} + \cdots + a^k b^{n-k}}_{\binom{n}{k} \text{ fois}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a+b)^n$.

4 Résumé et exemples

Soit E un ensemble fini à n éléments.

Vocabulaire : On s'intéresse aux suites finies $(x_1, \ldots, x_p)$ de p objets choisis dans E telles que :
- Les objets peuvent se répéter, leur ordre est important (*liste*).
- Les objets ne peuvent pas se répéter, leur ordre est important (*arrangement*).
- Les objets ne peuvent pas se répéter, leur ordre n'est pas important (*combinaison*).

Point de vue fonctions/parties :
- Une liste est une fonction de $[\![1,p]\!]$ dans E. Il y a n^p listes de p objets choisis dans E.
- Un p-arrangement de E est une fonction injective de $[\![1,p]\!]$ dans E. Il n'y a aucun $p-$arrangement si $p > n$ et $\frac{n!}{(n-p)!}$ $p-$arrangements sinon.
- Une permutation (ou $n-$arrangement) de E est une bijection de E dans E. Il y a $n!$ permutations.
- Une combinaison de p objets est une partie à p éléments de E. Il y a $\binom{n}{p}$ combinaisons possibles de p objets de E.

Exemples 4.1 :

1. Un code PIN est composé d'une série de 4 chiffres. Combien y a-t-il de codes possibles ?
2. Les 48 étudiants de PCSI sont classés au DS de maths.
   Combien y a-t-il de "top 10" possibles ? On distinguera deux interprétations.
3. Combien y a-t-il de façons de disposer 6 élèves autour d'une table à 6 places à la cantine ?
4. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot *PCSI* ? Du nom *BRINGUIER* ? De votre nom de famille ?
5. Jouer au loto consiste à choisir 5 numéros sur une grille de 49 numéros. Combien y a-t-il de choix possibles ?
6. Si les 48 étudiants de PCSI se font une bise, combien y a-t-il eu de bises échangées ?